

Algumas reflexões sobre o traçado das curvas de regolfo em canais com leito cilíndrico de pequeno declive

pelo

Prof. P. DE VARENNES E MENDONÇA

da Cadeira de Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas

1. Advertência.

Porque, de qualquer modo, a perfeita compreensão deste trabalho não seria possível sem o prévio conhecimento do livro intitulado *Curvas de Regolfo* [6], resolvi aligeirar a exposição recorrendo aos seguintes meios :

- a) o referido livro é designado pela abreviatura C. R.;
- b) um par de números separados por uma vírgula e colocado entre parênteses, como por exemplo (12,13), indica a equação assim denominada em C. R.; e
- c) os termos e os símbolos não definidos no presente artigo são empregados com os mesmos significados que em C. R.

2. Influência da fórmula adoptada para equação do movimento uniforme.

21. Preliminar: o problema dos pontos de inflexão do perfil superficial.

Limitar-me-ei a considerar fórmulas englobadas em (145,1) com $\theta = 1$, isto é, redutíveis à forma $V = \sqrt{\chi R^2 S}$.

Na p. 26 de C. R., admitiu-se explicitamente que o perfil superficial nunca apresentava pontos de inflexão. Recorde-se que esta hipótese foi introduzida a fim de permitir tomar uma decisão sobre o traçado

das figuras da Estampa de C. R. e levantar três das indeterminações de dD/dx , relativas às curvas da Classe C . Observe-se, contudo, que houve o cuidado de, no Quadro 217.7 de C. R., colocar entre parênteses os valores assim obtidos. Note-se ainda que a admissão de ausência de inflexões não teve mais nenhuma repercussão sobre o conteúdo desse livro.

Porque o estudo aqui feito se baseia no da variação de dD/dx , a conservação daquela hipótese — que implica, para as curvas dos Tipos C_1 e C_3 , ser dD/dx constante e igual a S_0 — obrigaria a pôr de parte as curvas da Classe C , ou melhor, a admitir que, para elas, seja nula a influência da fórmula adoptada para equação do movimento uniforme.

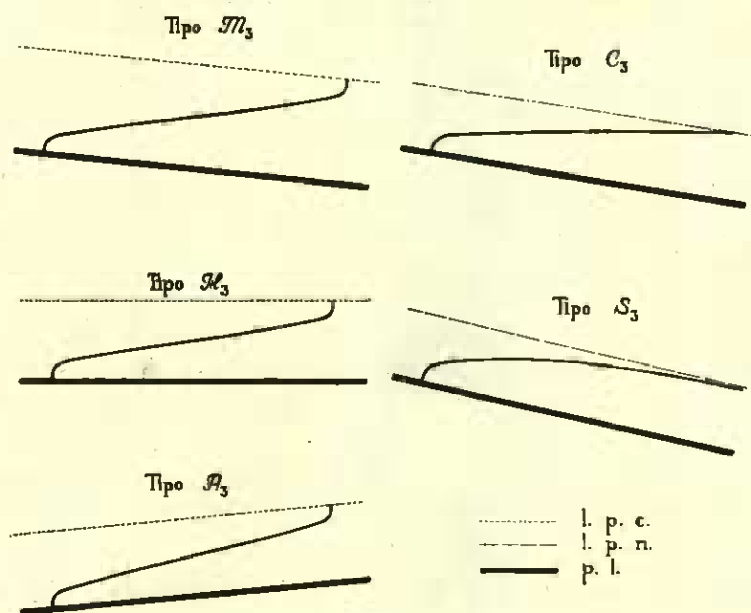


Fig. 1

Assim, para justificar o facto de não excluir deste estudo as curvas da Classe C , parece-me oportuno, em desenvolvimento da nota 4 da p. 26 de C. R., fazer algumas considerações sobre a questão dos pontos de inflexão, apesar de continuar a julgar que se trata dum problema de reduzido interesse prático.

A possibilidade teórica da existência de inflexões pode dizer-se provada.

Decorre da análise de MOURET ⁽¹⁾, recentemente generalizada por LAZARD [4] e baseada na consideração das profundidades características, isto é, das profundidades para os quais o p. s. tem tangente horizontal.

Também GUNDER [3] descobriu analiticamente que, em canais com secção rectangular larguíssima, quando se adopta para equação do movimento uniforme a fórmula de MANNING, as curvas da Zona 3 cortam ortogonalmente o perfil longitudinal do leito ⁽²⁾, facto que, como mostra a Fig. 1, implica a existência de, pelo menos, um ponto de inflexão em cada uma das curvas dos Tipos M_3 , H_3 e A_3 .

É fácil generalizar o resultado de GUNDER.

Com $\theta = 1$, de (216,3) tira-se

$$\frac{dD}{dx} = \frac{\frac{Q^2 P^\varphi}{\chi A^{\varphi+2}} - S_0}{\frac{\alpha Q^2 B}{g A^3} - 1}.$$

Atendendo a (142,2), obtém-se

$$\lim_{D \rightarrow 0} \frac{dD}{dx} = \lim_{D \rightarrow 0} \frac{\frac{Q^2 P^\varphi}{\chi A^{\varphi+2}}}{\frac{\alpha Q^2 B}{g A^3}} = \frac{g}{\alpha \chi} \cdot \lim_{D \rightarrow 0} \frac{P}{B} \cdot \lim_{D \rightarrow 0} \frac{1}{R^{\varphi-1}}.$$

Quando D tende para zero, é evidente que P/B e R têm por limites respectivos 1 e 0. Então, vem

$$\lim_{D \rightarrow 0} \frac{dD}{dx} = \begin{cases} \infty & \text{para } \varphi > 1, \\ \frac{g}{\alpha \chi} & \text{» } \varphi = 1, \\ 0 & \text{» } \varphi < 1. \end{cases}$$

Logo, quando se adopta para equação do movimento uniforme

⁽¹⁾ *Cours d'Hydraulique de l'École Nationale des Ponts et Chaussées*, Paris, 1913-1914. Citada e exposta por EYDOUX [2, p. 217-221].

⁽²⁾ Visto que a teoria exposta em C. R. diz respeito apenas aos canais de pequeno declive, este resultado equivale a afirmar que o p. s. é, nas vizinhanças do leito, vertical. É claro que tal conclusão evidencia que a equação de BELANGER-CORIOLIS não é válida para profundidades muito pequenas.

qualquer das fórmulas englobadas em (145,1), com $\theta = 1$ e $\varphi > 1$ ⁽¹⁾, seja qual for a forma da secção transversal do canal, as curvas da Zona 3 cortam ortogonalmente o p. l. Por conseguinte, nessas condições, as curvas dos Tipos M_3 , H_3 e R_3 apresentam pelo menos um ponto de inflexão, e as do Tipo C_3 não podem confundir-se exactamente com rectas horizontais.

A análise anterior levanta, para $\theta = 1$, todas as indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$ que figuram no Quadro 217.7 de C. R. Note-se que, no caso particular das secções larguíssimas e de se adoptar para equação do movimento uniforme a fórmula de CHÉZY, (214,3) fornece $I_0 = g/\alpha\gamma$; portanto, neste caso, o valor $S_0 = I_0$ de $\lim_{D \rightarrow 0} (dD/dx)$ a que, para as curvas do Tipo C_3 , conduz a hipótese da ausência de pontos de inflexão coincide com o agora calculado.

É possível demonstrar — acrescentarei — que, para $\varphi = 1$, o ponto de encontro com o leito é de inflexão ou de ondulação.

22. Dependência de χ e de φ , no caso de não se fixarem os caracteres normais.

O problema pode assim enunciar-se: fixados os caracteres do leito (rugosidade excluída), o caudal e a secção dominadora, como dependerá de χ e de φ a distância X das duas secções de dadas profundidades máximas D_1 e D_2 ?

Repare-se, em primeiro lugar, no seguinte. Pondo

$$j = \frac{dx}{dD},$$

vem

$$X = \int_{D_1}^{D_2} j \, dD = \bar{j} (D_2 - D_1) = |\bar{j}| \cdot |D_2 - D_1|,$$

onde \bar{j} representa o valor médio de j no intervalo $(D_2 - D_1)$. Como, para cada curva de golfo, j tem sempre o mesmo sinal, o módulo de \bar{j} coin-

⁽¹⁾ Por exemplo, as fórmulas de MANNING, GAUCKLER-STRICKLER, KUTTER, BAZIN, FORCHHEIMER e HERMANEK (Cf. Quadros 143.1, 143.2 e 145.1 de C. R.).

cide com o valor médio de $|j| = +\sqrt{j^2}$. Logo, se, para todas as profundidades compreendidas entre D_1 e D_2 , j^2 crescer ou decrescer, o mesmo sucederá a X .

Para $\theta = 1$, (216,3) pode escrever-se, atendendo a (12,13) e (142,2),

$$j = \frac{dx}{dD} = \frac{\frac{\alpha Q^2 B}{g A^3} - 1}{\frac{Q^2 P^2}{\chi A^{\varphi+2}} - S_0} = \frac{F - 1}{\frac{Q^2}{\chi A^2 R^2} - S_0}.$$

Supondo, como se fez em C. R., ser α constante, e A , B e P funções unívocas de D , torna-se evidente que, nas condições do problema, para dado valor de D , j varia apenas com χ e φ .

Tem-se

$$\frac{\partial(j^2)}{\partial\chi} = 2 \cdot \frac{dx}{dD} \cdot \frac{F - 1}{\left(\frac{Q^2}{\chi A^2 R^2} - S_0\right)^2} \cdot \frac{Q^2}{A^2 R^2} \cdot \frac{1}{\chi^2},$$

que mostra ter $\partial(j^2)/\partial\chi$ o sinal de

$$\frac{dD}{dx} (F - 1);$$

logo, j^2 , e por conseguinte X , é função crescente de χ nas correntes rápidas retardadas e lentas aceleradas, e decrescente nas rápidas aceleradas e lentas retardadas (Quadros 217.5 e 217.6 de C. R.).

Então, o Quadro 217.7 de C. R. permite concluir que X é função crescente de χ para as curvas dos Tipos \mathcal{M}_2 , \mathcal{M}_3 , C_3 , S_3 , \mathcal{H}_2 , \mathcal{H}_3 , \mathcal{A}_2 e \mathcal{A}_3 , e decrescente para as dos Tipos \mathcal{M}_1 , C_1 , S_1 e S_2 .

Como χ é tanto maior quanto menor a rugosidade, podemos afirmar que, adoptada para equação do movimento uniforme uma das fórmulas para as quais φ é constante — como, por exemplo, as de CHÉZY, MANNING, GAUCKLER-STRICKLER e FORCHHEIMER —, a atribuição ao leito duma maior rugosidade se traduz pelo aumento das distâncias X nas curvas dos Tipos \mathcal{M}_1 , C_1 , S_1 e S_2 , e por uma diminuição nas dos restantes Tipos.

Estudemos agora a variação de X com φ . Tem-se

$$\frac{\partial (j^2)}{\partial \varphi} = 2 \cdot \frac{dx}{dD} \cdot \frac{F-1}{\left(\frac{Q^2}{\chi A^2 R^2} - S_0 \right)^2} \cdot \frac{Q^2}{\chi A^2 R^2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \log R,$$

que indica ter $\partial(j^2)/\partial\varphi$ o sinal de

$$\frac{dD}{dx} (F-1) \log R.$$

Por consequência, quando entre as duas secções de profundidades D_1 e D_2 , R se mantém inferior [superior] à unidade, X é função crescente [decrescente] de φ nas curvas dos Tipos \mathcal{M}_1 , C_1 , S_1 e S_2 e função decrescente [crescente] nas dos restantes Tipos; quando, ao longo do lança, R passa pelo valor unitário, o sentido da variação depende do caso particular considerado.

Observando que a conclusão é válida qualquer que seja a unidade de comprimento adoptada, este resultado não pode deixar de considerar-se assaz paradoxal.

23. Dependência de φ , no caso de se fixarem os caracteres normais (leitos não-horizontais).

Para os leitos não-horizontais ($S_0 \neq 0$), o problema pode formular-se do seguinte modo, que, colocando a questão nas condições da prática, evita ainda o paradoxo anterior: — para dado leito, consideremos o conjunto de todas as curvas de regolfo, dum dado Tipo, relativas a uma corrente com determinados caracteres normais; como dependerá de φ a distância X das duas secções de profundidades máximas D_1 e D_2 ?

Atendendo a (12,13) e (142,2), a equação (216,4) fornece, para $\theta = 1$,

$$j = \frac{dx}{dD} = \frac{1}{S_0} \cdot \frac{1-F}{1 \mp \left(\frac{A_0}{A} \right)^2 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{\frac{2}{\varphi}}},$$

que mostra variar j , no citado conjunto, apenas com φ .

Desta equação, deduz-se

$$\frac{d(j^2)}{d\varphi} = 2 \frac{dx}{dD} \cdot \frac{1}{|S_0|} \cdot \frac{F-1}{\left[1 \mp \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^\varphi\right]^2} \cdot \left(\frac{A_0}{A}\right)^2 \left(\frac{R_0}{R}\right)^\varphi \log \frac{R}{R_0},$$

que indica ter $d(j^2)/d\varphi$ o sinal de

$$\frac{dD}{dx} (F-1) \log \frac{R}{R_0}$$

ou, visto a função logarítmica ser crescente, o de

$$\frac{dD}{dx} (F-1) (R-R_0).$$

Ora, (211,3) pode escrever-se

$$\frac{dD}{dx} (F-1) = S - S_0,$$

donde resulta

$$\frac{dD}{dx} (F-1) (S - S_0) = (S - S_0)^2 \geq 0.$$

Logo, admitindo que R é função crescente de D e atendendo à hipótese, já introduzida em C. R. (p. 22) de ser S função decrescente de D , para leitos descendentes ($S_0 > 0$), tem-se

$$\frac{dD}{dx} (F-1) (R - R_0) \leq 0$$

e, por conseguinte,

$$\frac{d(j^2)}{d\varphi} \leq 0.$$

Quer dizer: para leitos descendentes, seja qual for o Tipo de curva considerado, quanto maior é o valor de φ na equação do movimento uniforme adoptada menor é a distância X , de duas secções de profundidades dadas, a que a teoria conduz. Por exemplo, a adopção da fórmula de FORCHHEIMER ($\varphi = \frac{7}{5}$) em lugar da de MANNING ($\varphi = \frac{4}{3}$),

ou a desta em vez da de CHÉZY ($\varphi = 1$), traduz-se necessariamente por uma diminuição das distâncias X calculadas.

Menos simples é o caso dos leitos ascendentes. Nestes, por ser $S_0 < 0$, $(S - S_0)$, e portanto $(F - 1) \cdot dD/dx$, é sempre positivo, de modo que $d(j^2)/d\varphi$ tem o sinal de $(R - R_0)$, isto é, o de $(D - D_0)$. Quando ambas as profundidades D_1 e D_2 são superiores [inferiores] a D_0 , X é função crescente [decrecente] de φ . Porém, quando D_0 se situa entre as profundidades extremas, o resultado depende do problema particular considerado.

3. Ainda sobre a variante MANZANARES do método das diferenças finitas.

Já em C. R. (p. 32-34) tive ocasião, não só de o estender aos canais com leito ascendente, mas também de sugerir certas modificações do processo de traçado das curvas de regolfo devido a MANZANARES [5]. Essas modificações consistem em:

1) calcular as distâncias Δx das sucessivas secções a partir das diferenças de profundidade ΔD , em vez de ΔD em função de Δx ;

2) igualar o declive médio superficial \bar{S}_n em cada lanço, não ao calculado para o extremo a jusante (correntes lentas) ou a montante (correntes rápidas), mas sim à sua média aritmética.

Aponto agora uma outra modificação possível.

Recordemos que, quando se adopta para a perda de carga unitária S a expressão fornecida pela fórmula de CHÉZY $V = CV\sqrt{RS}$, isto é, quando se faz $\theta = \varphi = 1$, a equação diferencial das curvas de regolfo em canais com leito não-horizontal reveste a forma particular (223,1)

$$\frac{dD}{dx} = S_0 \cdot \frac{1 \mp \frac{A_0^3 P}{A^3 P_0}}{1 - \frac{A_k^3 P}{A^3 P_k} - \frac{B P_k}{B_k P}},$$

onde o sinal negativo diz respeito aos leitos descendentes ($S_0 > 0$) e o positivo aos ascendentes ($S_0 < 0$).

Em lugar de, como faz MANZANARES, se admitir a hipótese

$$\delta = \frac{I_k}{I} = \frac{B P_k}{B_k P} = 1,$$

pode pôr-se

$$\frac{B P_k}{B_k P} = \frac{1}{U},$$

sendo U , é claro, uma função de D .

Então, por (223,6), vem para valor do declive superficial:

$$S_w = S_0 - \frac{dD}{dx} = S_0 \cdot \frac{\pm U \frac{A_0^3 P_k}{A_k^3 P_0} - 1}{U \frac{A^3 P_k}{A_k^3 P} - 1}.$$

Se fizermos, como em C. R. [(223,4) e (223,8)],

$$Z = \frac{A^3 P_k}{A_k^3 P},$$

resultará

$$S_w = S_0 \cdot \frac{\pm U Z_0 - 1}{U Z - 1}.$$

Seja \bar{U} o valor médio de U no lanço limitado pelas secções Ω_1 e Ω_2 , de profundidades respectivas D_1 e D_2 , onde se deseja traçar a curva de regolfo. Por aproximação, pode supor-se

$$\bar{U} = \frac{U(D_1) + U(D_2)}{2}.$$

Então, admitindo que U se pode substituir por \bar{U} , obtém-se

$$S_w = S_0 \cdot \frac{\pm \bar{U} Z_0 - 1}{\bar{U} Z - 1}.$$

Basta agora fazer

$$T = \bar{U} Z,$$

para se chegar a

$$S_w = \frac{S_0(\pm T_0 - 1)}{T - 1},$$

equação de forma idêntica à da fórmula de MANZANARES, estendida aos leitos ascendentes (223,10).

4. Uma nova variante do método das diferenças finitas. ⁽¹⁾

A equação (223,1) pode também escrever-se

$$\frac{dD}{dx} = S_0 \cdot \frac{1 \mp \frac{A_0^3 P}{A^3 P_0}}{1 - \frac{A_k^3 B}{A^3 B_k}} = S_0 \cdot \frac{1 \mp \frac{A_0^3 B}{A^3 B_0} \frac{P B_0}{P_0 B}}{1 - \frac{A_k^3 B}{A^3 B_k}}$$

ou

$$\frac{dD}{dx} = S_0 \cdot \frac{\frac{A^3}{B} \mp \frac{A_0^3}{B_0} \frac{P B_0}{P_0 B}}{\frac{A^3}{B} - \frac{A_k^3}{B_k}}$$

expressão que, pondo

$$W = \frac{A^3}{B}$$

e

$$Y = \frac{P B_0}{P_0 B},$$

adquire o aspecto

$$\frac{dD}{dx} = S_0 \cdot \frac{W \mp Y W_0}{W - W_k}.$$

Então, tem-se

$$S_w = S_0 - \frac{dD}{dx} = S_0 \cdot \frac{\pm Y \frac{W_0}{W_k} - 1}{\frac{W}{W_k} - 1}.$$

Admitindo a hipótese

$$Y = \frac{I}{I_0} = \frac{P B_0}{P_0 B} = 1,$$

⁽¹⁾ Deve ficar bem claro que o facto de se indicar a existência de mais uma variante não implica, de modo algum, a preconização do seu emprego. Pessoalmente, continuo a considerar o processo padrão preferível, em regra, a todas as outras variantes do método das diferenças finitas.

e fazendo

$$G = \frac{W}{W_k}$$

e

$$J = S_0 (\pm G_0 - 1),$$

obtém-se finalmente

$$S_w = \frac{J}{G - 1}.$$

Exemplo. Dados do Exemplo 222.1 de C. R., isto é: $Q = 4,16 \text{ m}^3/\text{s}$; $n = 0,015$ (MANNING); $S_0 = 0,000400$; $D_c = 1,800 \text{ m}$ (açude); secção trapezoidal isósceles, com largura no fundo $b = 3,00 \text{ m}$ e taludes inclinados a 1:1 (ângulo do talude com o horizonte: $\eta = 45^\circ$, $c = \cot \eta = 1$).

Caracteres normais: $D_0 = 1,00 \text{ m}$; $A_0 = 4,00 \text{ m}^2$; $P_0 = 5,83 \text{ m}$; $B_0 = 5,00 \text{ m}$; $R_0 = 0,686 \text{ m}$ e $I_0 = 0,0029$.

Curva do Tipo M_1 .

Supôs-se $\alpha = 1$ e fez-se $\Delta D = 0,050$, excepto no último passo, onde se empregou $\Delta D = 0,040$. Tomou-se para secção de referência a do açude.

Tem-se, por (12,9),

$$W_k = \frac{A_k^3}{B_k} = \frac{Q^2}{g} = \frac{(4,16)^2}{9,80} = 1,766 = 1/0,566,$$

e ainda $W_0 = A_0^3/B_0 = 12,80$, $G_0 = W_0/W_k = 7,245$ e $J = S_0 (G_0 - 1) = 0,002498$.

QUADRO 1

D	ΔD	A	A^3	B	W	G
					(4) : (5)	$0,566 \times (6)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1,800	-	8,64	645	6,60	97,7	55,3
1,750	0,050	8,31	574	6,50	88,3	50,0
1,700	0,050	7,99	510	6,40	79,7	45,1

D	$G - 1$	$10^7 S_w$	$10^7 S_w$	$10^7 (S_0 - S_w)$	Δx	$-x$
		24980 : (8)		4000 - (10)	$10^7 \times (2) : (11)$	
	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
1,800	54,3	460	-	-	-	0,0
1,750	49,0	510	485	3515	142,2	142,2
1,700	44,1	566	538	3462	144,4	286,6

Mostra o Quadro 1 a disposição que se pode dar ao cálculo para trabalhar com

$$\Delta x = \frac{\Delta D}{S_0 - \bar{S}_v} \quad (223,11)$$

e

$$\bar{S}_w = \frac{S_w(D) + S_w(D + \Delta D)}{2} \quad (223,14).$$

Os resultados obtidos indicam-se no Quadro 3 (coluna 5).

5. Comparação da nova variante com a de MANZANARES.

A semelhança das duas variantes é flagrante. A diferença essencial reside em que, na de MANZANARES (sem a modificação mostrada possível no presente trabalho), se admite ser

$$U = \frac{P B_k}{P_k B} = 1, \text{ ou, o que é mesmo, } I = I_k,$$

ao passo que, na nova, se faz

QUADRO 2

$$Y = \frac{P B_0}{P_0 B} = 1, \text{ isto é, } I = I_0.$$

Em face da Estampa de C. R., é evidente que, nas curvas dos Tipos \mathcal{M}_1 e S_3 , esta segunda hipótese se afasta menos da realidade que a primeira. Nas curvas dos Tipos \mathcal{M}_3 e S_1 , a primeira hipótese é mais exacta. As duas hipóteses são equivalentes nas curvas dos Tipos \mathcal{M}_2 e S_2 , e perfeitamente idênticas nas dos Tipos \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_3 . Para as curvas dos Tipos \mathcal{A}_2 e \mathcal{A}_3 , não é possível uma comparação *a priori*: tudo depende da grandeza relativa de P_k , B_k , P_0 e B_0 , e dos valores de P e B no lanço considerado.

D	U	Y
1,800	1,104	1,052
1,750	1,102	1,049
1,700	1,099	1,047
1,650	1,096	1,045
1,600	1,093	1,041
1,550	1,090	1,038
1,500	1,087	1,035
1,450	1,084	1,032
1,400	1,081	1,030
1,350	1,078	1,026
1,300	1,074	1,023
1,250	1,070	1,020
1,200	1,066	1,015
1,150	1,062	1,012
1,100	1,058	1,008
1,050	1,054	1,004
1,010	1,051	1,001
1,000	1,050	1,000

No Quadro 2, registaram-se os valores de U e Y calculados para os dados do Exemplo. As médias dos valores extremos valem, respectivamente, 1,077 e 1,026; logo, as diferenças para a unidade são 0,077 e 0,026, e os erros relativos 7,7 % e 2,6 %.

Por ser

$$W_h = \frac{\alpha Q^2}{g},$$

a nova variante dispensa o cálculo da profundidade crítica.

Pondo lado a lado as equações

$$S_w = S_0 \cdot \frac{\pm U Z_0 - 1}{U Z - 1}$$

e

$$S_w = S_0 \cdot \frac{\pm Y G_0 - 1}{G - 1},$$

vê-se que a hipótese $U=1$ arrasta uma alteração simultânea de ambos os termos da fracção do segundo membro, ao passo que a hipótese $Y=1$ afecta apenas o numerador. Não deve, portanto, concluir-se precipitamente que, nos casos em que a hipótese $Y=1$ é mais exacta, a sua introdução, em lugar da de MANZANARES, se traduzirá sempre por um menor erro no valor de S_w .

6. Confronto dos resultados numéricos obtidos para os dados do Exemplo mediante vários processos de cálculo.

No Quadro 3, figuram os valores das distâncias $-x$ da secção do açude às de profundidades D obtidos, para os dados do Exemplo, mediante vários processos de cálculo. É a seguinte a correspondência entre os números das colunas e os processos empregados na obtenção de $-x$:

1 — processo padrão do método das diferenças finitas; equação do movimento uniforme, a fórmula de MANNING (Quadro 222.2 de C. R.);

2 — processo padrão; equação do movimento uniforme, a fórmula de CHÉZY;

QUADRO 3

D	Distância $-x$ da secção do açude à de profundidade D							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1,800	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
1,750	140,2	143,2	143,1	143,3	142,2	142,1	142,3	141,2
1,700	282,7	289,1	288,3	288,9	286,6	286,3	286,7	284,5
1,650	428,0	438,0	436,6	437,3	433,6	433,0	433,6	430,1
1,600	576,5	590,5	587,8	588,9	583,7	582,6	583,4	578,6
1,550	728,9	747,3	742,8	744,3	737,5	735,6	736,7	730,4
1,500	882,9	906,1	902,5	904,4	895,8	892,8	894,2	886,3
1,450	1043,0	1071,4	1068,0	1070,3	1059,8	1055,1	1056,9	1047,2
1,400	1210,6	1244,9	1240,8	1243,7	1230,9	1223,9	1226,2	1214,4
1,350	1388,0	1429,1	1423,1	1426,6	1411,3	1400,9	1403,8	1389,6
1,300	1574,6	1623,3	1618,0	1622,3	1603,9	1588,8	1592,4	1575,4
1,250	1782,6	1836,6	1830,6	1835,9	1813,7	1791,3	1795,7	1775,3
1,200	2008,2	2072,7	2068,9	2075,5	2048,9	2015,0	2020,5	1996,0
1,150	2275,3	2352,8	2348,2	2356,6	2324,5	2269,8	2276,8	2247,6
1,100	2618,6	2708,6	2703,1	2714,3	2674,6	2578,8	2587,9	2552,3
1,050	3123,2	3244,0	3239,0	3254,8	3202,0	2995,1	3008,1	2962,8
1,010	4087,4	4224,4	4229,1	4254,8	4168,2	3596,6	3614,2	3552,8

3 — variante MANZANARES, admitindo a hipótese $U=1$ e tomando para \bar{S}_m os valores dados por (223,14) (C. R., Quadro 223·2) ⁽¹⁾;

4 — variante MANZANARES, com a modificação sugerida na Secção 3 do presente trabalho ($\bar{U}=1,077$); \bar{S}_m calculado por (223,14);

5 — nova variante, descrita na Secção 4, tomando para \bar{S}_m os valores dados por (223,14);

6 — variante MANZANARES, admitindo a hipótese $U=1$ e tomando para \bar{S}_m o valor de S_m no extremo a jusante do respectivo lança (Quadro 223·3 de C. R.) ⁽¹⁾;

⁽¹⁾ Um lamentável lapso no cálculo da profundidade crítica (a inadvertida substituição do valor de Q^2 pelo de Q) afectou o tratamento numérico do Exemplo 223·1 de C. R. Por isso, os valores de $-x$, na primitiva impressão dos Quadros 223·2 e 223·3, são inexactos.

A devida correcção foi feita na *errata* suplementar, para a qual se chama a atenção do Leitor.

QUADRO 4

Termo de comparação: 2

D	Desvios absolutos							Módulos dos desvios relativos (0/00)						
	1	3	4	5	6	7	8	1	3	4	5	6	7	8
1,750	- 3,0	- 0,1	+ 0,1	- 1,0	- 1,1	- 0,9	- 2,0	20,9	0,7	0,7	7,0	7,7	6,3	14,0
1,700	- 6,4	- 0,6	- 0,2	- 2,5	- 2,8	- 2,4	- 4,6	22,1	2,1	0,7	8,6	9,7	8,3	15,9
1,650	- 10,0	- 1,4	- 0,7	- 4,4	- 5,0	- 4,4	- 7,9	22,8	3,2	1,6	10,0	11,4	10,4	18,0
1,600	- 14,0	- 2,7	- 1,6	- 6,8	- 7,9	- 7,1	- 11,9	23,7	4,6	2,7	11,5	13,4	12,0	20,2
1,550	- 18,4	- 4,5	- 3,0	- 9,8	- 11,7	- 10,6	- 16,9	24,6	6,0	4,0	13,1	15,7	14,2	22,6
1,500	- 23,2	- 3,6	- 1,7	- 10,3	- 13,3	- 11,9	- 19,8	25,6	4,0	1,9	11,4	14,7	13,1	21,9
1,450	- 28,4	- 3,4	- 1,1	- 11,6	- 16,3	- 14,5	- 24,2	26,5	3,2	1,0	10,8	15,2	13,5	22,6
1,400	- 34,3	- 4,1	- 1,2	- 14,0	- 21,0	- 18,7	- 30,5	27,6	3,3	1,0	11,2	16,9	15,0	24,5
1,350	- 41,1	- 6,0	- 2,5	- 17,8	- 28,2	- 25,3	- 39,5	28,8	4,2	1,7	12,5	19,7	17,7	27,6
1,300	- 48,7	- 5,3	- 1,0	- 19,4	- 34,5	- 30,9	- 47,9	30,0	3,3	0,6	12,0	21,3	19,0	29,5
1,250	- 54,0	- 6,0	- 0,7	- 22,9	- 45,3	- 40,9	- 61,3	29,4	3,3	0,4	12,5	24,7	22,3	33,4
1,200	- 64,5	- 3,8	+ 2,8	- 23,8	- 57,7	- 52,2	- 76,7	31,1	1,8	1,4	11,5	27,8	25,2	37,0
1,150	- 77,5	- 4,6	3,8	- 28,3	- 83,0	- 76,0	- 105,2	32,9	2,0	1,6	12,0	35,3	32,3	44,7
1,100	- 90,0	- 5,5	5,7	- 34,0	- 129,8	- 120,7	- 156,3	33,2	2,0	2,1	12,6	47,9	44,6	57,7
1,050	- 120,8	- 5,0	10,8	- 42,0	- 248,9	- 235,9	- 281,2	37,2	1,5	3,3	12,9	76,7	72,7	86,7
1,010	- 137,0	+ 4,7	30,4	- 56,2	- 627,8	- 610,2	- 671,6	32,4	1,1	7,2	13,3	148,6	144,4	159,0
Médias								28,1	2,9	2,0	11,4	31,7	29,4	39,7

7 — variante MANZANARES, com a modificação sugerida na Secção 3 e tomando para \bar{S}_n o valor de S_n no extremo a jusante de cada lanço;

8 — nova variante, substituindo \bar{S}_n pelo valor de S_n no extremo a jusante do lanço.

Visto que, tanto a variante MANZANARES, como a descrita na Secção 4, pressupõem a adopção da fórmula de CHÉZY para equação do movimento uniforme, só a comparação dos resultados a que elas conduzem com os da coluna 2 do Quadro 3 pode permitir avaliar a influência das hipóteses simplificativas introduzidas. É esta comparação que o Quadro 4 pretende facilitar.

Todavia, em virtude da fórmula de MANNING gozar, hoje em dia, de maior reputação, julgou-se que não seria descabido construir também

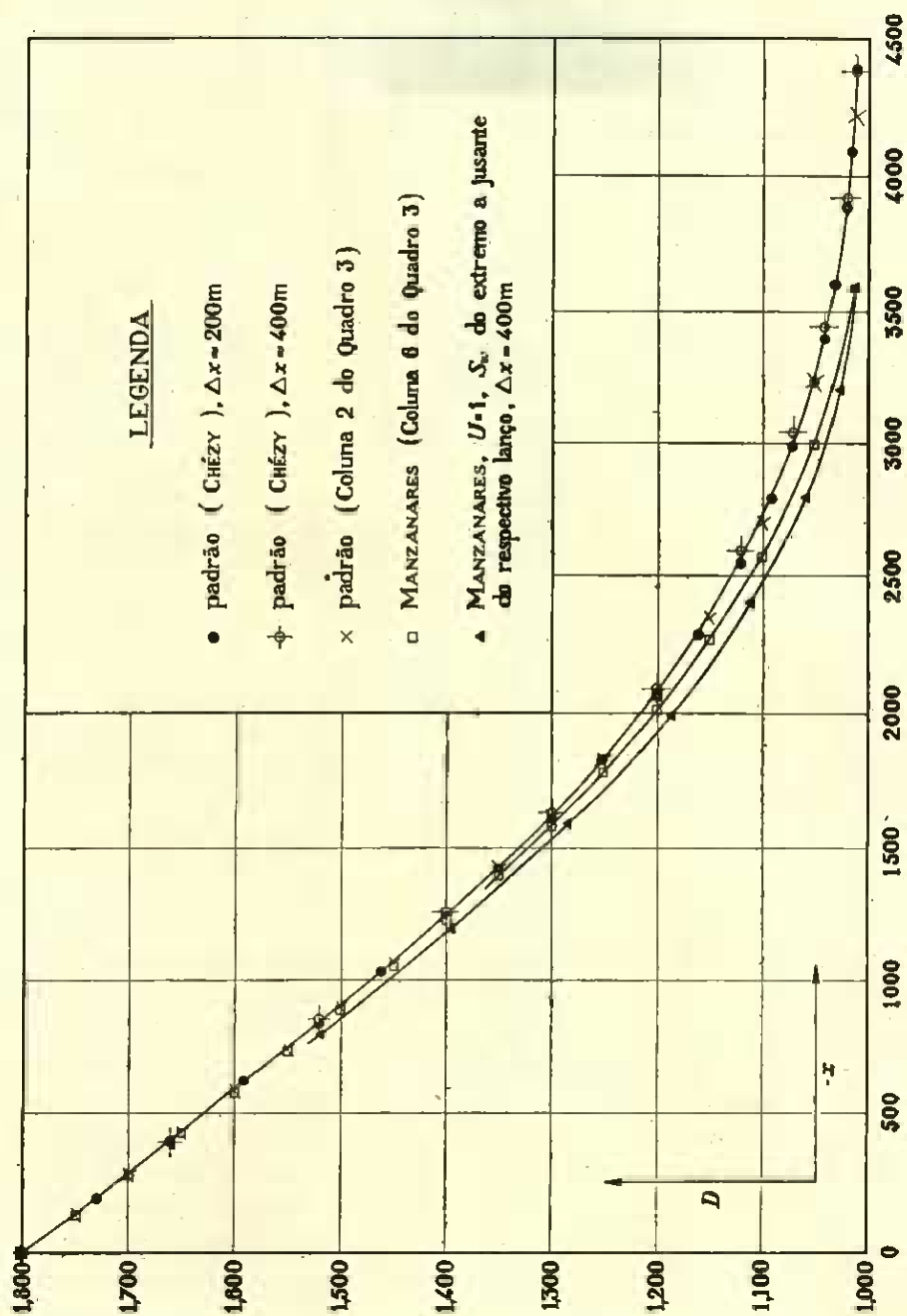


Fig. 2

num dos extremos do lança é inadmissível e que, por conseguinte, o processo gráfico de MANZANARES não é satisfatório. Com efeito, a citada substituição, não só conduz a desvios relativos da ordem dos 15 % (Quadro 4), mas ainda, o que é talvez mais grave, introduz uma grande sensibilidade ao critério de partição das alturas ou das distâncias, que destrói completamente a coerência interna do método das diferenças finitas, evidenciada na Fig. 2 pelo facto de três maneiras diferentes de aplicar o processo padrão fornecerem pontos que, sem esforço, se podem considerar situados sobre a mesma curva.

Furtando-nos embora a conceder-lhes generalidade que a consideração dum único caso não justifica, talvez mereça a pena tirar ainda as seguintes conclusões, relativas a processos que utilizam as equações (223,11) e (223,14):

1) não se observa que a hipótese simplificativa da variante MANZANARES, com ou sem a modificação sugerida na Secção 3, afecte grandemente os resultados; pelo contrário, os números das colunas 2, 3 e 4 do Quadro 3 pouco se afastam uns dos outros;

2) a nova variante descrita neste trabalho, pelo menos para as curvas do Tipo M_1 em canais de secção trapezoidal, parece conduzir a resultados praticamente intermédios entre os fornecidos pelo processo padrão quando se adopta para equação do movimento uniforme ora a fórmula de CHÉZY, ora a de MANNING;

3) a influência da equação do movimento uniforme adoptada revela-se superior à da introdução das hipóteses $U=1$ ou $Y=1$.

7. Apontamentos para o tabelamento das funções introduzidas pelos métodos de MONONOBE - MENDONÇA e de BAKHMETEFF - MATZKE.

As breves indicações dadas a seguir constituem um suplemento às fornecidas em C. R. e por BAKHMETEFF [1, p. 303-305].

Por conveniência de escrita, as notações aqui usadas são independentes das empregadas em C. R. e nas Secções anteriores do presente trabalho.

Designando por x a variável real positiva, e por q e r dois números inteiros que satisfazem às condições $r \geq 1$ e $q < r$, tem-se

$$\int \frac{x^q dx}{x^r + 1} = A + B + C + D + \text{const.}$$

e

$$\int \frac{x^q dx}{x^r - 1} = E + F + G + H + I + \text{const.}$$

As funções A , B , C e D podem obter-se do seguinte modo.

A) Para $q \geq 0$, é $A=0$. Para $q < 0$, A é dado por

$$A = \frac{x^{q+1}}{q+1} - \frac{x^{q+r+1}}{q+r+1} + \frac{x^{q+2r+1}}{q+2r+1} - \dots \pm \frac{x^{q+kr+1}}{q+kr+1} \mp \dots$$

Destes termos só existem aqueles em que o expoente de x é inferior a zero.

B) Esta parcela é nula, excepto quando há um inteiro $k \geq 0$ tal que é $q+kr+1=0$, o que, é claro, só pode suceder para $q < 0$. Neste caso, tem-se

$$B = \pm \log x.$$

Quando é $A=0$, deve tomar-se o sinal $+$. Sendo $A \neq 0$, o sinal de B é o contrário ao do último termo de A , suposto escrito da maneira acima adoptada.

C) Para r par, é $C=0$. Para r ímpar, C vale

$$C = \mp \frac{1}{r} \log (x+1).$$

Se for $q \geq 0$, o sinal de C é o de $(-1)^q$. Para $q < 0$, há dois casos a considerar. Se é $A=B=0$, C tem o sinal $-$. Caso contrário, o sinal de C é o oposto ao do termo anterior (B ou, quando B é nulo, o último termo de A).

D) Esta parcela é nula para $r=1$. Sendo $r \geq 2$, D tem o valor

$$D = \frac{1}{r} \sum_i L_i,$$

com

$$L_i = -\cos \frac{(2i+1)(q+1)\pi}{r} \log \left[x^2 - 2x \cos \frac{(2i+1)\pi}{r} + 1 \right] + \\ + 2 \sin \frac{(2i+1)(q+1)\pi}{r} \arctan \frac{x - \cos \frac{(2i+1)\pi}{r}}{\sin \frac{(2i+1)\pi}{r}}$$

O índice i toma os valores 0, 1, 2, ..., até ao maior inteiro inferior a $\frac{r-1}{2}$.

Mediante estas regras, não é difícil obter as equações (312,3) a (312,8) e (313,1) a (313,24) de C. R.

Vejamos agora como podem achar-se as funções E , F , G , H e I .

E) Esta parcela é nula para $q \geq 0$. Sendo $q < 0$, tem-se

$$E = -\frac{x^{q+1}}{q+1} - \frac{x^{q+r+1}}{q+r+1} - \frac{x^{q+2r+1}}{q+2r+1} - \dots - \frac{x^{q+kr+1}}{q+kr+1} - \dots$$

Destes termos só existem aqueles em que o expoente de x é inferior a zero.

F) É nulo, excepto quando há um inteiro $k \geq 0$ tal que se tem $q+kr+1=0$, o que, evidentemente, só pode acontecer para $q < 0$. Se assim for, tem-se

$$F = -\log x.$$

G) Vale sempre

$$G = \frac{1}{r} \log |x-1|.$$

H) Para r ímpar, é $H=0$. Para r par, é

$$H = \frac{(-1)^{q+1}}{r} \log (x+1).$$

I) Se for $r \leq 2$, I nulo. Para $r \geq 3$, é

$$I = \frac{1}{r} \sum_i M_i,$$

com

$$M_i = \cos \frac{2i(q+1)\pi}{r} \log(x^2 - 2x \cos \frac{2i\pi}{r} + 1) - \\ - 2 \sin \frac{2i(q+1)\pi}{r} \arctan \frac{x - \cos \frac{2i\pi}{r}}{\sin \frac{2i\pi}{r}},$$

tomando o índice i os valores 1, 2, 3, ..., até ao maior inteiro inferior a $\frac{r}{2}$.

Mesmo no caso das funções com $(x^r + 1)$ em denominador, não é difícil, por meio de conveniente mudança de variável, obter séries de rápida convergência na vizinhança de $x=1$.

Eis um exemplo.

Pondo

$$x = 1 - w,$$

vem

$$\frac{x}{x^3 + 1} = \frac{1 - w}{(1 - w)^3 + 1} = \frac{1 - w}{2 - 3w + 3w^2 - w^3} \\ = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}w - \frac{3}{4}w^2 - \frac{11}{8}w^3 - \frac{11}{16}w^4 + \dots \right),$$

donde resulta

$$\int_x^1 \frac{x \, dx}{x^3 + 1} = \int_0^w \frac{(1 - w) \, dw}{(1 - w)^3 + 1} \\ = \frac{w}{2} \left(1 + \frac{1}{4}w - \frac{1}{4}w^2 - \frac{11}{32}w^3 - \frac{11}{80}w^4 + \dots \right) \\ = \frac{1-x}{2} \left[1 + \frac{1}{4}(1-x) - \frac{1}{4}(1-x)^2 - \frac{11}{32}(1-x)^3 - \frac{11}{80}(1-x)^4 + \dots \right].$$

CITAÇÕES

[1] BAKHMETEFF, Boris A.

- 1932 *Hydraulics of Open Channels*. 1st ed.; 3d impr. McGraw-Hill Book Co., Inc.; New York and London.

[2] EYDOUX, D.

- 1921 *Hydraulique Générale et Appliquée*. Encyclopédie du Génie Civil et des Travaux Publics. J.-B. Bailliére et Fils; Paris.

[3] GUNDER, Dwight F.

- 1942 Profile Curves for Open-Channel Flow. *Proc. Amer. Soc. civ. Engrs* **68**(4): 535-541.

[4] LAZARD, A.

- 1947 Contribution à l'étude théorique du mouvement graduellement varié en Hydraulique. *Ann. Ponts Chauss.*, n.º 2 (Mars-Avril), p. 185-219.

[5] MANZANARES, Alberto Abecasis

- 1940 Movimento permanente gradualmente variado. Estudo Geral do Regolho. *Técnica, Lisboa* **8**: 74-90.
- 1941 Contribuição ao estudo de alguns problemas hidráulicos. *Bol. Ordem Engrs* **5**: 224-241, 266-271, 287-303, 325-340, 399-404.

[6] MENDONÇA, P. de Varennes e

- 1945 *Curvas de Regolho* (Canais com leito cilíndrico de pequeno declive e rugosidade uniforme): Livraria Ferin, Lda.; Lisboa.